أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $x\left(y^2-1\right)dx+y\left(x^2-1\right)dy=0$.

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=x\left(y^2-1\right)\quad ,Q(x,y)=y\left(x^2-1\right)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2xy\quad ,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2xy$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0=0\ ,y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x x\left(y^2-1\right)dx+\int_0^y y\left((0)^2-1\right)dy$$

$$=\int_0^x x\left(y^2-1\right)dx-\int_0^y y\,dy=\frac{1}{2}x^2\left(y^2-1\right)-\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y)=\frac{1}{2}\left[x^2y^2-x^2-y^2\right]}$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y(1-xy)dx+x(1+xy)dy=0$.

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=y(1-xy)\quad ,Q(x,y)=x(1+xy)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1-2xy\quad ,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1+2xy$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}}dz$$

ومن أجل $z=x\,y$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y}=x\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=y$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(1-2xy)-(1+2xy)}{xy(1+xy)-xy(1-xy)}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-4xy}{xy[1+xy-1+xy]}dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-4}{2xy}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{xy}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{z}dz \Rightarrow \ln\mu=-2\ln z \Rightarrow \ln\mu=-\ln z^2 \Rightarrow$$

$$\ln\mu=\ln\frac{1}{z^2} \Rightarrow \mu=\frac{1}{z^2} \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{x^2y^2}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^2y^2}[y(1-xy)]dx+\frac{1}{x^2y^2}[x(1+xy)]dy=0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{y}\right]dy=0$$

وبأخذ $x_0=1\ ,\ y_0=1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(1,y)dy=\int_1^x\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{1}{(1)y^2}+\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{xy}-\ln(x)\right]_{x=1}^{x=x}+\left[-\frac{1}{y}+\ln(y)\right]_{y=1}^{y=y}$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{xy}-\ln(x)\right)-\left(-\frac{1}{y}-0\right)\right]+\left[\left(-\frac{1}{y}+\ln(y)\right)-\left(-\frac{1}{1}+0\right)\right]$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{xy}-\ln(x)+\frac{1}{y}-\frac{1}{y}+\ln(y)+1\right)\right]=\left[\left(-\frac{1}{xy}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)\right]=$$

$$\boxed{F(x,y)=-\frac{1}{xy}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1}$$

❋ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'=\frac{x^2\left(2\frac{y}{x}\right)}{x^2\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} \Rightarrow y'=\frac{\left(2\frac{y}{x}\right)}{\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة متجانسة ولحلها نجري التحويل التالي:

$$\frac{y}{x}=z \Rightarrow y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$x\,z'+z=\frac{2z}{1-z^2}\Rightarrow x\,z'=\frac{2z}{1-z^2}-z=\frac{2z-z+z^3}{1-z^2}=\frac{z+z^3}{1-z^2}\Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z\left(1+z^2\right)}{1-z^2}\Rightarrow\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}$$

ولننجز التكامل الأخير بطريقة تفريق الكسور:

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{\left(1+z^2\right)}$$

$$\left(1+z^2\right)\qquad z$$

أمثال z^2 هي:

$$A+B=-1$$

أمثال z هي:

$$C=0$$

أمثال الحد الثابت:

$$A=1$$

وبالحل المشترك نجد أنَّ:

$$A=1\ ,\ B=-2\ \ ,\ C=0$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{z}-\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}\Rightarrow\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\int\frac{1}{z}dz-\int\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}dz\Rightarrow$$

$$\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{z}dz-\int\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln z-\ln\left(1+z^2\right)=\ln x+\ln c$$

$$\ln\left(\frac{z}{1+z^2}\right)=\ln\left(cx\right)\Rightarrow\frac{z}{1+z^2}=cx$$

وبالعودة للمتحولات القديمة أي بتعويض $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة يصبح بالشكل:

$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=cx\Rightarrow\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=cx\Rightarrow\boxed{y=c\left(x^2+y^2\right)}$$

❋ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^{-x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{x}y\right]' = \frac{1}{x}\left[xe^{-x}\right] = e^{-x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{x}y = -e^{-x} + c \Rightarrow \boxed{y = -xe^{-x} + cx}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(3y\,e^{3x} - 2x\right)dx + e^{3x}dy = 0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y) = \left(3y\,e^{3x} - 2x\right) \quad , Q(x,y) = e^{3x}$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3e^{3x} \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3e^{3x}$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy = \int_0^x \left(3y\,e^{3x} - 2x\right)dx + \int_0^y e^{3(0)}dy$$

$$= \int_0^x \left(3y\,e^{3x} - 2x\right)dx + \int_0^y dy = \left[ye^{3x} - x^2\right]_{x=0}^{x=x} + \left[y\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$= ye^{3x} - x^2 - y + y = ye^{3x} - x^2 \Rightarrow \boxed{F(x,y) = ye^{3x} - x^2}$$

❋ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(2y^2 + \frac{1}{x}\right)dx + 2xydy = 0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y) = \left(2y^2 + \frac{1}{x}\right) \quad , Q(x,y) = 2xy$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=4y \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2y$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{4y-2y}{2xy}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y}{2xy}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\ln(\mu)=\ln(x) \Rightarrow \mu=x$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$x\left(2y^2+\frac{1}{x}\right)dx+x(2xy)dy=0 \Rightarrow \left(2xy^2+1\right)dx+\left(2x^2y\right)dy=0$$

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x\left(2xy^2+1\right)dx+\int_0^y\left(2(0)^2y\right)dy$$
$$=\left[x^2y^2+x\right]_{x=0}^{x=x}+0=x^2y^2+x \Rightarrow \boxed{F(x,y)=x^2y^2+x}$$

❋ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y\,dx+\left(x-3x^3y^3\right)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=y \quad , Q(x,y)=x-3x^3y^3$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1-9x^2y^3$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}}dz$$

ومن أجل $z=x^2y^2$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y \ , \ \frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1-\left(1-9x^2y^3\right)}{2xy^2\left(x-3x^3y^3\right)-2x^2y\left(y\right)}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{9x^2y^3}{2x^2y^2\left[1-3x^2y^3-1\right]}dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{9x^2y^3}{2x^2y^2\left[-3x^2y^3\right]}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2y^2}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3}{2}\frac{1}{z}dz \Rightarrow$$

$$\ln\mu=-\frac{3}{2}\ln z \Rightarrow \ln\mu=-\ln z^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \ln\mu=\ln\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \mu=\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\mu=\frac{1}{\left(x^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^3y^3} \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{x^3y^3}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^3y^3}y\,dx+\frac{1}{x^3y^3}\left(x-3x^3y^3\right)dy=0 \Rightarrow \frac{1}{x^3y^2}dx+\left(\frac{1}{x^2y^3}-3\right)dy=0$$

وبأخذ $x_0=1\ ,\ y_0=1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(1,y)dy=\int_1^x\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{1}{(1)^2(1)^3}-3\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{x^2y^2}\right]_{x=1}^{x=x}+\left[-2y\right]_{y=1}^{y=y}=-\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2}-2y+2$$

$$\boxed{F(x,y)=-\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2}-2y+2}$$

❋ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية مع ذكر نوعها والحل الشاذ لها.

$$y=xy'-e^{y'}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تملك الشكل: $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ وهي معادلة كليرو ولحلها نفرض $y'=p$ ، ثم نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنَّ:

$$y=xp-e^p \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=xp'+p-p'e^p$$

ومنه نجد أنَّ:

$$xp'-p'e^p=0 \Rightarrow \left(x-e^p\right)p'=0$$

وبالتالي إما :

$$p'=0 \Rightarrow p=c$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل العام في هذه الحالة هو:

$$y = cx - e^c$$

أو:

$$x = e^p$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$y = pe^p - e^p = (p-1)e^p$$

وبالتالي فالحل الشاذ وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = e^p \\ y = (p-1)e^p \end{cases}$$

وللحصول على الحل الشاذ ديكارتياً لدينا من المعادلة الأولى أنَّ:

$$x = e^p \Rightarrow p = \ln x$$

نعوض في المعادلة الثانية فنجد أنَّ الحل الشاذ ديكارتياً:

$$y = (\ln x - 1)e^{\ln x} \Rightarrow \boxed{y = x(\ln x - 1)}$$

❋ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2xy' + \frac{1}{y'} - y = 0$$

الحل:

بوضع $y' = p$ نجد أنَّ:

$$2xp + \frac{1}{p} - y = 0 \Rightarrow y = 2xp + \frac{1}{p} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p = y' = 2p + 2xp' - \frac{p'}{p^2} \Rightarrow p - 2p = 2xp' - \frac{p'}{p^2} \Rightarrow -p = \left(2x - \frac{1}{p^2}\right)p' \Rightarrow$$

$$-p^3 = (2xp-1)p' \Rightarrow -p^3 = \left(2xp^2 - 1\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow -\frac{1}{p^3} = \frac{1}{\left(2xp^2-1\right)}\frac{dx}{dp} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{(2xp-1)}{p^3} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{\left(2xp^2-1\right)}{p^3} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3} \Rightarrow$$

$$x' + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3}$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = e^{\ln p^2} = p^2$$

وبضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[xp^2\right]' = p^2\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$xp^2=\ln p+c$$

ومنه فإنَّ:

$$x=\frac{\ln p+c}{p^2}$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=2p\left(\frac{\ln p+c}{p^2}\right)+\frac{1}{p}=2\left(\frac{\ln p+c}{p}\right)+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}(2\ln p+1)+2\frac{c}{p}$$

مما سبق نجد أنَّ الحل الوسيطي للمعادلة المعطاة هو:

$$x=\frac{\ln p+c}{p^2}\quad,\quad y=\frac{1}{p}(2\ln p+1)+2\frac{c}{p}$$

❋ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'^3-1=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'^3=1\ \Rightarrow\ y'=1\ \Rightarrow\ y=x+c$$

❋
❋
❋ ❋
❋
❋

أولاً:

❶ $$y'-\frac{1}{x}y=y^2e^{-x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^2 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=e^{-x}$$

ثم نجري التحويل:

$$z=\frac{1}{y}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z'=-\frac{y'}{y^2}\Rightarrow\frac{y'}{y^2}=-z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-z'-\frac{1}{x}z=e^{-x}\ \Rightarrow\ z'+\frac{1}{x}z=-e^{-x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[x.z]' = -xe^{-x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$x.z = -\int xe^{-x}dx + c \Rightarrow x.z = -\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + c \Rightarrow x.z = (x+1)e^{-x} + c \Rightarrow$$

$$z = \frac{(x+1)e^{-x} + c}{x}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y} = \frac{(x+1)e^{-x} + c}{x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{(x+1)e^{-x} + c}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❷ $y' + \frac{1}{x}y = x^2 y^4$

الحل: إنَّ المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^4 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^3} = x^2$$

ثم نجري التحويل:

$$z = \frac{1}{y^3}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z' = -\frac{3y'}{y^4} \Rightarrow \frac{y'}{y^4} = -\frac{1}{3}z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{1}{x}z = x^2 \Rightarrow z' - \frac{3}{x}z = -3x^2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{-3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^3}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{x^3}.z\right]' = \frac{1}{x^3}\left(-3x^2\right) = -\frac{3}{x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{x^3}.z = -\ln\left(x^3\right) + c \Rightarrow z = x^3\left(c - \ln\left(x^3\right)\right)$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y^3}=x^3\left(c-\ln\left(x^3\right)\right) \qquad \boxed{y=\frac{1}{x\left(c-\ln\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{3}}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❸ $2yy''=\left(1+y'^2\right)$

الحل:

بما أن المعادلة لا تحوي على x نفرض أن $y'=z$ ومنه نجد أنَّ:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dz}{dy}=z\frac{dz}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$2y\left(z\frac{dz}{dy}\right)=\left(1+z^2\right)\Rightarrow\frac{2z}{1+z^2}dz=\frac{dy}{y}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\ln\left(1+z^2\right)=\ln\left(c_1y\right)\Rightarrow 1+z^2=c_1y\Rightarrow z^2=c_1y-1\Rightarrow z=\sqrt{c_1y-1}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$y'=\sqrt{c_1y-1}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{c_1y-1}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}}=dx\Rightarrow\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2\Rightarrow$$

$$\sqrt{c_1y-1}=\frac{c_1}{2}(x+c_2)\Rightarrow c_1y-1=\frac{c_1^2}{4}(x+c_2)^2\Rightarrow\boxed{y=\frac{c_1}{4}(x+c_2)^2-\frac{1}{c_1}}$$

❹ $yy''+y'^2=y'$

الحل:

بما أن المعادلة لا تحوي على x نفرض أن $y'=z$ ومنه نجد أنَّ:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dz}{dy}=z\frac{dz}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y\left(z\frac{dz}{dy}\right)+z^2=z\Rightarrow y\left(z\frac{dz}{dy}\right)=z-z^2\Rightarrow y\left(\frac{dz}{dy}\right)=1-z\Rightarrow\frac{dz}{1-z}=\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dz}{1-z}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln(y)=-\ln(1-z)+\ln c\Rightarrow\ln(y)=\ln\left(\frac{c}{1-z}\right)\Rightarrow y=\frac{c}{1-z}\Rightarrow$$

$$1-z=\frac{c}{y}\Rightarrow z=1-\frac{c}{y}$$

والعودة للمتحولات القديمة $p=y'$ نجد أنَّ:

$$y'=1-\frac{c}{y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{c}{y}=\frac{y-c}{y}\Rightarrow\left(\frac{y}{y-c}\right)dy=dx\Rightarrow\int\left(\frac{y}{y-c}\right)dy=\int dx$$

$$\boxed{y+c\ln(y-c)=x+c_1}$$

حيث أنَّ:

$$\int\left(\frac{y}{y-c}\right)dy=\int\left(\frac{y-c+c}{y-c}\right)dy=\int dy+c\int\frac{1}{y-c}dy=y+c\ln(y-c)$$

أو(الطريقة الأولى أفضل)

بملاحظة أنَّ الطرف الأيسر هو مشتق جداء فالمعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dx}(yy')=\frac{d}{dx}(y)$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$yy'=y+c_1\Rightarrow y'=\frac{y+c_1}{y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y+c_1}{y}\right)\Rightarrow\left(\frac{y}{y+c_1}\right)dy=dx\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{y}{y+c_1}\right)dy=x+c_2\Rightarrow\int\left(\frac{y+c_1-c_1}{y+c_1}\right)dy=x+c_2\Rightarrow y-c_1\ln(y+c_1)=x+c_2$$

ومنه فالحل العام للمعادلة المعطاة:

$$\boxed{y=c_1\ln(y+c_1)+x+c_2}$$

ثانياً: أثبت أن المعادلة الآتية متجانسة ، ثم أوجد حلها العام.

$$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx=xdy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة متجانسة كونها تملك الشكل $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ ولحلها نجري التحويل:

$$z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xz\Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=z+\sqrt{1-z^2}\Rightarrow xz'=\sqrt{1-z^2}\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\sqrt{1-z^2}\Rightarrow\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\arcsin(z)=\ln x+\ln c\Rightarrow\arcsin(z)=\ln(cx)\Rightarrow$$

$$z=\sin\left[\ln(cx)\right]$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ:

$$\frac{y}{x}=\sin\left[\ln(cx)\right] \Rightarrow \boxed{y=x\sin\left[\ln(cx)\right]}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

☜ أثبت أنَّ المعادلة التفاضلية الآتية متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية، ثم أوجد الحل العام لها.

$$\left(x^3+xy\right)y'=y^2-x^4$$

الحل:

نبدل في المعادلة كل x بـ λx ، وكل y بـ $\lambda^n y$ ، وكل y' بـ $\lambda^{n-1}y'$ فنجد أنَّ:

$$\left((\lambda x)^3+(\lambda x)(\lambda^n y)\right)\left(\lambda^{n-1}y'\right)=\left(\lambda^n y\right)^2-(\lambda x)^4 \Rightarrow$$

$$\left(\lambda^3x^3+\lambda^{n+1}x\,y\right)\left(\lambda^{n-1}y'\right)=\lambda^{2n}y^2-\lambda^4x^4 \Rightarrow \left(\lambda^{n+2}x^3+\lambda^{2n}x\,y\right)y'=\lambda^{2n}y^2-\lambda^4x^4$$

ولإيجاد قيمة n فإننا نجعل قوى λ في جميع حدود المعادلة متساوية:

$$n+2=2n=2n=4 \Rightarrow n=2$$

وهذا يعني أن المعادلة المعطاة متجانسة الأبعاد من الدرجة الثانية ، ولحلها نجري التحويل: $y=u.x^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'=x^2u'+2xu$$

كما أنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'=\frac{y^2-x^4}{x^3+xy}$$

وبالاستفادة من التحويل تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$x^2u'+2xu=\frac{\left(x^2u\right)^2-x^4}{x^3+x\left(x^2u\right)}=\frac{x^4\left(u^2-1\right)}{x^3(u+1)}=\frac{x(u-1)(u+1)}{(u+1)}=xu-x \Rightarrow$$

$$x^2u'+2xu-xu+x=0 \Rightarrow x\,u'=-(u+1) \Rightarrow x\frac{du}{dx}=-(u+1) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u+1}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u+1}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u+1)=-\ln x+\ln c \Rightarrow \ln(u+1)=\ln\left(\frac{c}{x}\right) \Rightarrow$$

$$u+1=\frac{c}{x} \Rightarrow u=\frac{c}{x}-1$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد: $y=x^2.u \Rightarrow u=\frac{y}{x^2}$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{y}{x^2}=\frac{c}{x}-1 \Rightarrow \boxed{y=cx-x^2}$$

☜ أوجد الحل الخاص للمعادلة: $\left(x+ye^{\frac{y}{x}}\right)dx-xe^{\frac{y}{x}}dy=0$ والمحقق لـ $y(1)=0$.

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$xe^{\frac{y}{x}}dy=\left(x+ye^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

وبقسمة طرفي المعادلة على x نجد أنَّ:

$$e^{\frac{y}{x}}dy=\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

ومنه فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}}\Rightarrow y'=\frac{\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}}$$

وبإجراء التحويل:

$$\frac{y}{x}=z\quad\Rightarrow y=x.z\quad\Rightarrow y'=x.z'+z$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أنَّ:

$$x.z'+z=\frac{\left(1+ze^{z}\right)}{e^{z}}=\frac{1}{e^{z}}+z\quad\Rightarrow x.z'=\frac{1}{e^{z}}\quad\Rightarrow x.\frac{dz}{dx}=\frac{1}{e^{z}}\quad\Rightarrow\frac{dx}{x}=e^{z}dz\Rightarrow$$
$$\ln(x)=e^{z}+c$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\ln(x)=e^{\frac{y}{x}}+c$$

وهو الحل العام، ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نعوض الشرط المعطى في الحل العام وهو $y(1)=0$ أي $y=0$ عندما $x=1$ ومنه نجد أنَّ:

$$\ln(1)=e^{\frac{0}{1}}+c\quad\Rightarrow 0=1+c\Rightarrow c=-1$$

وبالتالي فإنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$\boxed{\ln(x)=e^{\frac{y}{x}}-1}$$

☜ **أوجد الحل العام للمعادلة الآتية من المرتبة الثانية:**

$$y(y-1)y''+y'^{2}=0$$

الحل:

بما أنَّ المعادلة لا تحوي على x نفرض أن $y'=z$ ومنه نجد أنَّ:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dz}{dy}=z\frac{dz}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y(y-1)\left(z\frac{dz}{dy}\right)+z^{2}=0\quad\Rightarrow\quad y(y-1)\left(z\frac{dz}{dy}\right)=-z^{2}\Rightarrow\quad y(y-1)\left(\frac{dz}{dy}\right)=-z\Rightarrow$$
$$\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{y(y-1)}\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=\int\frac{\left[(y-1)-y\right]}{y(y-1)}dy\quad\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)dy\Rightarrow$$
$$\ln(z)=\ln(y)-\ln(y-1)+\ln c\quad\Rightarrow\ln(z)=\ln\left(\frac{cy}{y-1}\right)\Rightarrow z=\frac{cy}{y-1}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z = y'$ نجد أنَّ العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$y' = \frac{cy}{y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{cy}{y-1} \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy = cdx \Rightarrow \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = cdx \Rightarrow$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = c\int dx \Rightarrow y - \ln y = cx + c_1 \Rightarrow \boxed{y = \ln y + cx + c_1}$$

أو(الطريقة الأولى أفضل)

إن المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y^2 y'' - yy'' + y'^2 = 0 \Rightarrow y^2 y'' - \left(yy'' - y'^2\right) = 0 \Rightarrow y'' - \left(\frac{yy'' - y'^2}{y^2}\right) = 0$$

$$y'' - \left(\frac{y'}{y}\right)' = 0$$

بالمكاملة نجد أنَّ:

$$y' - \left(\frac{y'}{y}\right) = c_1 \Rightarrow y'\left(1-\frac{1}{y}\right) = c_1 \Rightarrow y'\left(\frac{y-1}{y}\right) = c_1 \Rightarrow y' = c_1\left(\frac{y}{y-1}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1\left(\frac{y}{y-1}\right) \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy = c_1 dx \Rightarrow \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = c_1 dx \Rightarrow$$

$$y - \ln(y) = c_1 x + c_2 \Rightarrow \boxed{y = \ln(y) + c_1 x + c_2}$$

☜ **أوجد الحل وسيطياً:**

❶ $x^2 y'^3 - xy' + y = 0$

الحل:

إنَّ المعادلة محلولة بالنسبة لـ y من أجل ذلك نفرض $y' = p$ فنجد أنَّ المعادلة المعطاة تصبح بالشكل:

$$x^2 p^3 - xp + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = xp - x^2 p^3} \cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد:

$$y' = xp' + p - 3x^2 p^2 p' - 2xp^2$$

وبما أنَّ $y' = p$ فالمعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$p = xp' + p - 3x^2 p^2 p' - 2xp^3 \Rightarrow x\left(1-3x\,p^2\right)p' - 2xp^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1-3x\,p^2\right)p' - 2p^3 = 0 \Rightarrow \left(1-3x\,p^2\right)p' = 2p^3 \Rightarrow p' = \frac{2p^3}{\left(1-3x\,p^2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p^3}{\left(1-3x\,p^2\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1-3x\,p^2}{2p^3} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{3}{2p}x + \frac{1}{2p^3} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = \frac{1}{2p^3}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية وغير متجانسة الدالة فيها x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{3}{2p}dp} = e^{\frac{3}{2}\int \frac{1}{p}dp} = e^{\frac{3}{2}\ln p} = e^{\ln\left(p^{\frac{3}{2}}\right)} = p^{\frac{3}{2}}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dp}\left(xp^{\frac{3}{2}}\right)=p^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2p^{3}}=\frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}p^{-\frac{3}{2}}$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة لـ p نجد أنَّ:

$$xp^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\frac{p^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+c=-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}+c \Rightarrow \boxed{x=-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots(1')$$

وبتعويض قيمة x في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)p-\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)^{2}p^{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{y=-p^{-1}+cp^{-\frac{1}{2}}-\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)^{2}p^{3}}\cdots\cdots\cdots(2')$$

العلاقات $(1')$ و $(2')$ تمثل الحل الوسيطي المطلوب.

❷ $y=3y'^{4}+\frac{1}{y'}$

الحل: بفرض $y'=p$ عندئذٍ تصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\boxed{y=3p^{4}+\frac{1}{p}}\cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$y'=12p^{3}p'-\frac{p'}{p^{2}}$$

وبما أنَّ $y'=p$ فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$p=12p^{3}p'-\frac{p'}{p^{2}} \Rightarrow p=\left(12p^{3}-\frac{1}{p^{2}}\right)p' \Rightarrow p'=\frac{p}{\left(12p^{3}-\frac{1}{p^{2}}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{\left(12p^{3}-\frac{1}{p^{2}}\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dp}=\frac{\left(12p^{3}-\frac{1}{p^{2}}\right)}{p}=\left(12p^{2}-\frac{1}{p^{3}}\right) \Rightarrow dx=\left(12p^{2}-\frac{1}{p^{3}}\right)dp$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\boxed{x=\left(4p^{3}+\frac{1}{2p^{2}}\right)+c}\cdots\cdots\cdots(2)$$

إنَّ العلاقتين (1) و (2) تمثلان الحل الوسيطي للمعادلة المعطاة.

☜ **سؤال مهم:** أوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x\left(y'^2+1\right)=2yy'$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة محلولة بالنسبة لـ x تكتب بالشكل:

$$x=\left(\frac{2yy'}{y'^2+1}\right)$$

وبوضع $y'=p$ نجد أن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$x=\left(\frac{2yp}{p^2+1}\right)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{dx}{dy}=\left(\frac{\left(2p+2y\frac{dp}{dy}\right)\left(p^2+1\right)-\left(2yp\right)\left(2p\frac{dp}{dy}\right)}{\left(p^2+1\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(p^2+1\right)\frac{dy}{dp}-4yp^2\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left[\left(p^2+1\right)-2p^2\right]\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

وبما أنَّ $y'=p$ أي أنَّ:

$$p=y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

وبالتالي فالمعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{1}{p}=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$2p^2\left(p^2+1\right)+2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)^2\Rightarrow 2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)^2-2p^2\left(p^2+1\right)$$

$$2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)\left(p^2+1-2p^2\right)=\left(1+p^2\right)\left(1-p^2\right)\Rightarrow$$

$$2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right)\left(1-p^2\right)$$

وبقسمة الطرفين على المقدار $1-p^2\neq 0$ نجد أنَّ:

$$2yp\frac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right) \Rightarrow \frac{2p}{1+p^2}dp=\frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{2p}{1+p^2}dp=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln\left(1+p^2\right)=\ln\left(y\right)+\ln\left(c\right) \Rightarrow \ln\left(1+p^2\right)=\ln\left(cy\right) \Rightarrow 1+p^2=cy \Rightarrow$$

$$p^2=cy-1 \Rightarrow p=\sqrt{cy-1}$$

وبما أنَّ $p=y'$ فإنَّ المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$y'=\sqrt{cy-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{cy-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{cy-1}}=dx$$

وبالمكاملة نجد أنَّ:

$$\frac{2}{c}\sqrt{cy-1}=x+c_1 \Rightarrow \sqrt{cy-1}=\frac{c}{2}\left(x+c_1\right) \Rightarrow cy-1=\frac{c^2}{4}\left(x+c_1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{4cy=c^2\left(x+c_1\right)^2+4}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة، أما الحل الشاذ فيتم استنتاجه من :

$$1-p^2=0 \Rightarrow \left(1-p\right)\left(1+p\right)=0 \Rightarrow p=\mp1 \Rightarrow y'=\mp1 \Rightarrow y=\mp x$$

وهذا الحل لا يمكن استنتاجه من عبارة الحل العام.

❋ لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x\sin y+y\cos y\right)dx+\left(x\cos y-y\sin y\right)dy=0$$

أوجد عامل التكميل لها.

الحل:

لدينا من المعادلة المعطاة أنَّ:

$$p\left(x,y\right)=\left(x\sin y+y\cos y\right) \quad , \quad q\left(x,y\right)=\left(x\cos y-y\sin y\right)$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y \ , \ \frac{\partial q}{\partial x}=\cos y$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial q}{\partial x}\neq\frac{\partial p}{\partial y}$ ، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$p'_y-q'_x=x\cos y+\cos y-y\sin y-\cos y=x\cos y-y\sin y=q\left(x,y\right)$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{p'_y-q'_x}{q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=dx \Rightarrow \ln\left(\mu\right)=x \Rightarrow \mu=e^x$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة، وتكتب بالشكل:

$$e^x(x\sin y+y\cos y)dx+e^x(x\cos y-y\sin y)dy=0$$

وفيها:

$$P(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y)\ ,\ Q(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$$

وبالتالي توجد دالة $F(x,y)$ تحقق:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\quad ,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q$$

نختار إحدى العلاقتين ولتكن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y)=xe^x\sin y+ye^x\cos y$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x نجد أنّ:

$$F(x,y)=\sin y\int xe^x dx+y\cos y\int e^x dx+\varphi(y)$$
$$=\sin y\left[xe^x-\int e^x dx\right]+[y\cos y]e^x+\varphi(y)\Rightarrow$$
$$F(x,y)=(x-1)e^x\sin y+ye^x\cos y+\varphi(y)$$

وباشتقاق طرف العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(x-1)e^x\cos y+e^x\cos y-ye^x\sin y+\varphi'(y)$$
$$=xe^x\cos y-e^x\cos y+e^x\cos y-ye^x\sin y+\varphi'(y)$$
$$=xe^x\cos y-ye^x\sin y+\varphi'(y)$$
$$=e^x(x\cos y-y\sin y)+\varphi'(y)$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$e^x(x\cos y-y\sin y)=\frac{\partial F}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y)+\varphi'(y)\Rightarrow$$
$$\varphi'(y)=0\ \Rightarrow\ \varphi(y)=c$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$F(x,y)=(x-1)e^x\sin y+ye^x\cos y+c$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❋ أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y'+2y-y^2-1=0$$

الحل:

$$y'=y^2-2y+1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(y-1)^2\Rightarrow\frac{dy}{(y-1)^2}=dx$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$-\frac{1}{y-1}=x+c \Rightarrow \frac{1}{y-1}=-(x+c) \Rightarrow y-1=-\frac{1}{x+c} \Rightarrow y=1+\frac{1}{x+c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

✵ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy'+y^2-y-x^2=0$ ، علماً أنَّها تقبل حلاً خاصاً من الشكل: $y_1=x$.

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'+\frac{1}{x}y^2-\frac{1}{x}y-x=0$$

نلاحظ أنَّ هذه المعادلة تملك الشكل: $y'+p(x)y^2+q(x)y+R(x)=0$ وهي معادلة ريكاتي، ولحلها يجب أن نعتمد على الحل الخاص ولذلك نجري التحويل التالي: $y=y_1+\frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y=x+\frac{1}{z}} \cdots\cdots\cdots(*) \Rightarrow y'=1-\frac{z'}{z^2}$ ، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left(1-\frac{z'}{z^2}\right)+\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{z}\right)-x=0 \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{z'}{z^2}\right)+\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{2x}{z}+\frac{1}{z^2}\right)-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{z}\right)-x=0 \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{z'}{z^2}\right)+\left(x+\frac{2}{z}+\frac{1}{xz^2}\right)-\left(1+\frac{1}{xz}\right)-x=0 \Rightarrow$$

$$1-\frac{z'}{z^2}+x+\frac{2}{z}+\frac{1}{xz^2}-1-\frac{1}{xz}-x=0 \Rightarrow -\frac{z'}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{1}{xz^2}-\frac{1}{xz}=0 \Rightarrow \times\left(-z^2\right)$$

$$z'-2z-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}z=0 \Rightarrow z'+\left(-2+\frac{1}{x}\right)z=\frac{1}{x}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(-2+\frac{1}{x}\right)dx}=e^{-2x+\ln x}=e^{-2x}e^{\ln x}=xe^{-2x}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[xe^{-2x}z\right]'=\left(xe^{-2x}\right)\frac{1}{x} \Rightarrow \left[xe^{-2x}z\right]'=e^{-2x}$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$xe^{-2x}z=\int e^{-2x}dx+c \Rightarrow xe^{-2x}z=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c \Rightarrow z=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}+ce^{2x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z}=x\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+ce^{2x}}\right)$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$y = x + \frac{1}{z} = x + x\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+ce^{2x}}\right) = x\left(1+\frac{1}{-\frac{1}{2}+ce^{2x}}\right) =$$

$$= x\left(\frac{-\frac{1}{2}+ce^{2x}+1}{-\frac{1}{2}+ce^{2x}}\right) = x\left(\frac{\frac{1}{2}+ce^{2x}}{-\frac{1}{2}+ce^{2x}}\right) = x\left(\frac{1+2ce^{2x}}{-1+2ce^{2x}}\right) \Rightarrow \boxed{y = x\left(\frac{1+2ce^{2x}}{-1+2ce^{2x}}\right)}$$

عامل التكميل:

تسمى المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولي وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx}$$

تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[e^{\int p(x)dx}\,y\right]' = q(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\left[e^{\int p(x)dx}\,y\right] = \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + c \Rightarrow \boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + c\right]}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❋ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ ، علماً أنَّها تقبل حلاً خاصاً من الشكل: $y_1 = \frac{1}{x}$.

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2}$$

نلاحظ أنَّ هذه المعادلة تملك الشكل: $y' + p(x)y^2 + q(x)y + R(x) = 0$ وهي معادلة ريكاتي، ولحلها يجب أن نعتمد على الحل الخاص ولذلك نجري التحويل التالي: $y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}} \cdots\cdots\cdots(*) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$ ،

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} - \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - \frac{2}{xz} - \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow \times\left(-z^2\right)$$

$$z' + \frac{2}{x}z - 1 = 0 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = 1$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[x^2 z\right]' = \left(x^2\right)(1) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \left[x^2 z\right]' = x^2$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$x^2 z = \int x^2 dx + c \quad \Rightarrow x^2 z = \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow z = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) \Rightarrow z = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3 + 3c}{3}\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3x^2}{x^3 + 3c}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + 3c} = \frac{x^3 + 3c + 3x^3}{x^4 + 3cx} = \frac{4x^3 + 3c}{x^4 + 3cx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{4x^3 + 3c}{x^4 + 3cx}}$$